

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ МОБИЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГРАВИМЕТРИИ НА МОРСКИХ ОБЪЕКТАХ

А.С. Девятисильный, А.Ю. Коноплин, А.В. Шурыгин

Статья посвящена гравиметрии на морском подвижном объекте. Отмечается, что центральной проблемой при решении такой задачи является проблема численного дифференцирования измеряемой функции, ориентированная на высокоточные оценки кинематических параметров движения в качестве опорного результата. Для достижения последнего предлагаются методология и вычислительная процедура, существенно отличающиеся от известных. Приводимый в статье демонстрационный пример подтверждает гипотезу о спектре производных, о чём с достаточностью свидетельствует соответствующий графический материал. Приводятся две формы систем дифференциальных (по кинематическим параметрам) уравнений гравиметрии. Представлен определяющий признак ковариантности уравнений при интерпретации движения в геоцентрических и эллипсоидальных системах координат. Возможность высокоэффективного решения задачи мобильной гравиметрии подтверждена результатами вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: морской подвижный объект, подводный аппарат, вычислительная мобильная гравиметрия, система координат, измеряемая функция, численное дифференцирование, ковариантность уравнений, вычислительный эксперимент.

Введение

Проблема освоения водной среды на всех исторических периодах развития человеческого сообщества всегда была актуальной и остаётся таковой в наше время значимых и резонирующих природных, технологических, политических эволюций и катаклизмов, так или иначе влияющих на физическое состояние Земли. Особо важна эта проблема для России, обладающей одной седьмой частью земной суши и имеющей самую протяжённую линию контакта с Мировым океаном, что неизбежно порождает множество надежд, но и рисков.

В предлагаемом ниже фрагменте плановых исследований по программам государственных заданий речь идёт о разделе прикладной геофизики – гравиметрии (гравиметрии), производимой подвижными морскими объектами (надводными и подводными) как носителями современного информационно-навигационного комплекса, неотъемлемой частью которого является ЭВМ. Последнее требует глубокого понимания и формализации – создания математических образов (моделей) тех процессов, с которыми отождествляется решение задач гравиметрии и в ко-

нечном итоге – создание цифровых карт гравитационных моделей Земли, обеспечивающих перманентную интерпретацию их пространственно-временных изменений.

Достаточно полно история, проблемы, методы и достижения современной гравиметрии освещены в монографиях [1, 2, 3], а также в ряде периодических изданий, например, в российском журнале «Гироскопия и навигация».

Основное содержание статьи изложено в её разделах, представляющих сведения о геометрической модели Земли, о наиболее применимых в теории инерциальной навигации и гравиметрии координатных системах, о методе решения проблемы численного дифференцирования кинематических параметров, рассматриваемых здесь в качестве важнейших, о результатах вычислительного эксперимента.

1. Опорная модель формы Земли

Учитывая, что в статье речь идёт главным образом о мобильной гравиметрии на морских объектах (подводных и надводных), в качестве модели формы

(фигуры) Земли принимается эллипсоид вращения (эллипсоид Клеро [4]), с поверхностью, отождествляемой с невозмущённой поверхностью Океана и ортогональной направлению силы тяжести в каждой её точке. Заметим, что как геометрический объект эллипсоид с достаточностью представляется двумя параметрами – большой (a) и малой (b) полуосями.

2. Координатные системы

2.1. Эллипсоидальная (или геодезическая) система отсчёта с координатами $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}, h\}$ где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\lambda}$ – широта и долгота (от Гринвича) подвижного объекта, а h – его расстояние по нормали к поверхности Океана, примем, что для морских по сути, не по ведомству, объектов $h = 0$.

2.2. Геоцентрическая система отсчёта $O\eta = O\eta_1\eta_2\eta_3$ с началом в точке O (центр масс Земли) с декартовыми координатами $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ и сферическими координатами где φ и λ (заметим, что $\lambda = \tilde{\lambda}$) – соответственно широта и долгота (от Гринвича), а r – радиус местоположения объекта, отождествляемого с точкой O_1 , т.е. отрезок $OO_1 = r$.

2.3. Связь между параметрами геодезической и геоцентрической координатными системами.

Полагая, что центр масс Земли в обоих случаях один и тот же – точка O , имеем [4]:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \left(h + \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}^i}} \right) \cos \tilde{\varphi} \cos \tilde{\lambda}, \\ \eta_2 &= \left(h + \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}^i}} \right) \cos \tilde{\varphi} \sin \tilde{\lambda}, \\ \eta_3 &= \left(h + \frac{(1 - e^2)a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}^i}} \right) \sin \tilde{\varphi}, \end{aligned} \quad (1)$$

или $\lambda = \tilde{\lambda}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \left[1 - \frac{ae}{a + h\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}^i}} \right] \operatorname{tg} \tilde{\varphi}; \\ r &= \left[h + \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}^i}} \right]^2 \cos^2 \tilde{\varphi} + \\ &+ \left[h + \frac{(1 - e^2)a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}^i}} \right]^2 \sin^2 \tilde{\varphi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ – квадрат эксцентриситета эллипса вращения.

Уравнения (1) и (2) – суть преобразования вида $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}, h\} \rightarrow \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$. Обратное ему преобразование

может быть реализовано как с помощью численных итерационных процедур, так и с помощью прямых («точных») вычислений по формулам аналитических решений; побуждаемым к последнему фактом является тот, о котором упомянуто выше, – эллипсоид полностью представляется только двумя параметрами (a, b).

Весьма актуальным примером прямого решения является следующее [5,6,7]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= 2 \operatorname{arctg} \frac{\zeta_3}{d + \sqrt{d^2 + \zeta_3^2}}, \\ \lambda &= 2 \operatorname{arctg} \frac{\zeta_3}{\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1 + \zeta_2}}, \\ h &= \frac{s + e^2 - 1}{s} \sqrt{d^2 + \zeta_3^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где s и d вычисляются следующим образом (пошаговый алгоритм):

$$\begin{aligned} \text{1-й шаг} \quad s_1 &= \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{a^2}, \\ \text{2-й шаг} \quad s_2 &= \frac{1 + e^2}{a^2} \zeta_3^2, \\ \text{3-й шаг} \quad s_3 &= \frac{s_1 + s_2 - e^4}{6}, \\ \text{4-й шаг} \quad s_4 &= e^4 \frac{s_1 s_2}{4s_3^3}, \\ \text{5-й шаг} \quad s_5 &= \sqrt{1 + s_4 + \sqrt{s_4(2 + s)}}, \\ \text{6-й шаг} \quad s_6 &= s_3 \left(1 + s_5 + \frac{1}{s_5} \right), \\ \text{7-й шаг} \quad s_7 &= \sqrt{s_6 + e^4 s_2}, \\ \text{8-й шаг} \quad s_8 &= e^2 \frac{s_6 + s_7 + s_8 - s_2}{2s_7}, \\ \text{9-й шаг} \quad s &= \sqrt{s_6 + s_7 + s_8^2 - s_8}, \\ d &= \frac{s\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}}{s + e^2}. \end{aligned}$$

Это преобразование решает проблему вычислений вблизи географических полюсов.

2.4. Подвижные координатные трёхгранники. С подвижной точкой O_1 связаны два ортогональных триэдра – $O_1x = O_1x_1x_2x_3$ и $O_1\tilde{x} = O_1\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ с первыми двумя осями, направленными на географические Восток и Север и осями Ox_3 и $O\tilde{x}_3$ – соответственно по вектору места объекта η и по вектору внешней нормали к эллипсоиду. Имеет место обратное ортогональное преобразование $x \rightarrow \tilde{x}$ [4]:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1, \\ \tilde{x}_2 &= \cos(\tilde{\varphi} - \varphi)x_2 - \sin(\tilde{\varphi} - \varphi)x_3, \\ \tilde{x}_3 &= \sin(\tilde{\varphi} - \varphi)x_2 + \cos(\tilde{\varphi} - \varphi)x_3.\end{aligned}\quad (4)$$

3. Уравнения движения морского объекта

Под уравнениями движения морского объекта здесь понимаются уравнения для материализованной точки \tilde{x}_i (уравнения динамики И. Ньютона), записанные в удельных силах в проекциях на оси подвижных триэдров O_1x и $O_1\tilde{x}$, что наиболее комплементарно задаче мобильной гравиметрии, а именно, в триэдре O_1x [6]:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 + \frac{v_1}{r}(v_3 - v_2 \operatorname{tg} \varphi) + 2(v_3 u_2 - v_2 u_3) &= F_1 = f_1 + g_1, \\ \dot{v}_2 + \frac{v_2}{r}(v_1 \operatorname{tg} \varphi + v_2 v_3) + 2v_1 u_3 + u_2 u_3 r &= F_2 = f_2 + g_2, \\ \dot{v}_3 - \frac{v_3}{r}(v_1^2 + v_2^2) - 2v_1 u_3 - u_2^2 r &= F_3 = f_3 + g_3,\end{aligned}\quad (5)$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ – вектор скорости относительно твёрдой Земли, $\mathbf{u} = (0, u_2, u_3)^T$ – вектор угловой скорости Земли, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ – вектор сил негравитационной природы, который, заметим, может быть измерен с помощью трёхкомпонентного (3D-) ньютонометра [8]; $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$ – напряжённость гравитационного поля, желаемая цель решения задачи мобильной векторной (в общем случае) гравиметрии (МВГ). Это решение вполне достижимо [9], когда на борту подвижного объекта присутствует 3D-ньютонометр (он же, в такой его роли и 3D-гравиметр) и элементы системы точечного позиционирования, например [10], с помощью ГЛОНАСС. Дополнительные возможности для решения задач МВГ и инерциальной навигации открываются с применением ещё одного векторного измерителя – ДУСа, т.е. измерителя (датчика) вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$.

Известный недостаток, обусловленный тем, что $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow \pm 90^\circ$, преодолевается переходом к другой (ортодромической) системе координат. В триэдре $O_1\tilde{x}$ [6]:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1 &= \dot{\tilde{v}}_1 + \frac{\tilde{v}_1}{r_1}(\tilde{v}_3 - \tilde{v}_2 \operatorname{tg} \tilde{\varphi}) - \tilde{v}_2 \tilde{u}_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) + \tilde{v}_3 \tilde{u}_2 + u_2 \dot{r}_1 - \tilde{f}_1, \\ \tilde{g}_2 &= \dot{\tilde{v}}_2 + \frac{\tilde{v}_2}{r_1} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} + \frac{\tilde{v}_2 \tilde{v}_3}{r_2} + 2\tilde{v}_1 \tilde{u}_3 + \tilde{u}_2 \tilde{u}_3 r_1 - \tilde{f}_2, \\ \tilde{g}_3 &= \dot{\tilde{v}}_3 - \frac{\tilde{v}_3}{r_3} - 2\tilde{v}_1 \tilde{u}_2 - \tilde{u}_2^2 r_1 - \tilde{f}_3,\end{aligned}\quad (6)$$

где $\tilde{v}_{12}^2 = \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2$, $\tilde{v}_3 = \dot{r}_3$, $r_1 = \rho_1 + h$, $r_2 = \rho_2 + h$,

$r_3 = \left(\frac{\sin^2 \psi}{r_1} + \frac{\cos^2 \psi}{r_2}\right)^{-1}$ – радиусы кривизн точки на поверхности, отстающей от поверхности эллипсоида на значение высоты h ; $\rho_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \tilde{\varphi})^{3/2}}$, $\rho_2 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \tilde{\varphi})^{3/2}}$; $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0,006783$, a и b – большая и малая полуоси эллипсоида, ψ – путевой угол движения в касательной к поверхности плоскости $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$, так что $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_{12} \sin \psi$, $\tilde{v}_2 = \tilde{v}_{12} \cos \psi$.

Проблема приполярных исследований гравитационного поля Земли решается с учётом биективности преобразования $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}, h\} \leftrightarrow \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$.

Как видим из изложенного выше, для оценки напряженности гравитационного поля требуется знание удельных сил инерции, определяемых кинематическими параметрами, и измерений сил негравитационной природы, выполняемых трёхкомпонентным ньютонометром.

Стоит особо отметить здесь существенный методологический факт полной ковариантности уравнений (5) и (6), что является следствием осуществимости точных прямых преобразований вида (1) и (3); таким образом, утверждается тождественность двух понятий – «ковариантность дифференциальных уравнений» и «инвариантность закона, в силу которого они составлены [11]»

Рассмотрим частный случай движения объекта по поверхности эллипсоида, когда $\tilde{v}_2 = 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1 &= -\tilde{f}_1 + \dot{\tilde{v}}_1 + \frac{\tilde{v}_1 \tilde{v}_3}{r_1} + 2\tilde{v}_3 \tilde{u}_2, \\ \tilde{g}_2 &= -\tilde{f}_2 + \frac{\tilde{v}_1^2}{r_1} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} + 2\tilde{v}_1 \tilde{u}_3 + \tilde{u}_2 \tilde{u}_3 r_1, \\ \tilde{g}_3 &= -\tilde{f}_3 + \dot{\tilde{v}}_3 - \frac{\tilde{v}_1^2}{r_1} - 2\tilde{v}_1 \tilde{u}_2 - \tilde{u}_2^2 r_1;\end{aligned}\quad (7)$$

где $\tilde{v}_{12}^2 = \tilde{v}_1^2$.

Очевидно, что наиболее благоприятной для решения задачи векторной гравиметрии режим движения объекта реализуется, если $\tilde{v}_2 = 0$, $\tilde{v}_1 = \operatorname{const}$ и $h = \operatorname{const}$ ($\tilde{v}_3 = 0$). Тогда:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1 &= -\tilde{f}_1, \\ \tilde{g}_2 &= -\tilde{f}_2 + \frac{\tilde{v}_1^2}{r_1} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} + 2\tilde{v}_1 \tilde{u}_3 + \tilde{u}_2 \tilde{u}_3 r_1, \\ \tilde{g}_3 &= -\tilde{f}_3 - \frac{\tilde{v}_1^2}{r_1} - 2\tilde{v}_1 \tilde{u}_2 - \tilde{u}_2^2 r_1.\end{aligned}\quad (8)$$

В частности, если ещё и $\tilde{v}_1 = 0$, имеет место стационарная гравиметрия. В тех случаях, когда речь идёт о скалярной гравиметрии, оценке величины $|\mathbf{g}| = g$, иногда её отождествляют со значением g_3 .

4. Проблема численного дифференцирования

Обозначим через $x(t)$ произвольную измеряемую функцию. Примеры таковой – это измеряемые координаты, скорости, дальности, фазы сигналов и т.п., являющиеся функциями параметра t , для определённости, времени.

Модель эволюции функции $x(t)$ на произвольном интервале времени τ с учётом, что она измеряется в начале этого интервала, представим следующим образом:

$$x = x_1, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_n = 0, \\ z_1 = x = x_1 + \varepsilon_1,$$

где z_1 и ε_1 – измерение и погрешность соответственно.

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \\ z = Hx + \varepsilon, \quad \dim x = n. \quad (9)$$

Матрица A , $\dim A = n \times n$, нильпотента с индексом $q = n$, т.е. $A^n = 0$; она имеет $n-1$ отличных от нуля элементов – $A_{ij} = 0$ при $i \geq 1$ и $j = i+1$. Матрица H , $\dim H = 1 \times n$ – строка с отличным от нуля первым элементом $H_1 = 1$, т.е. $H = (1, 0, \dots, 0)$.

При численном решении сформулированной обратной задачи требуется обращение к дискретной модификации модели (9), которую, с учётом сказанного выше о матрице A , на интервале времени $[t_k, t_{k+1}]$, $t_{k+1} - t_k = \tau = \text{const}$, $k = 0, 1, 2, \dots$; можно записать в виде

$$x_{k+1} = \Phi_k(\tau)x_k, \\ z_{k+1} = H_{k+1}x_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, \quad (10)$$

или

$$x_{i+1} = \Phi(\tau)x, \\ z_{k+1} = H_{p,k+1}(\tau)x_{k+1} + \varepsilon_{k+1},$$

или

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k, \\ z_{k+1} = H_p x_k + \varepsilon_{k+1}.$$

Так, при фиксированном τ и $H = \text{const}$ стационарны и матрицы $\Phi_k(\tau) = \Phi$, $H_{k+1} = H$ и $H_{p,k+1} = H_{p,k+1} \Phi_k(\tau) = H\Phi = H_p$, причём

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \dots & \frac{\tau^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \tau & \dots & \frac{\tau^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{\tau^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_p = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \dots & \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}.$$

Представление (10) комплементарно (9), и тем точнее, чем меньше τ ; вместе с этим следует особо отметить, что с уменьшением τ неизбежно ухудшение разрешимости обратной задачи (по Адамару) в условиях конечной точности измерений и вычислений. Изменить ситуацию к лучшему можно, вводя процедуру преобразования переменных, приводящую к формам, не зависящим от τ . Эта процедура выполняется в следующей последовательности [12]:

1. Модель (10) с помощью преобразования $x_k = D_f f_k$, где $D_f = \text{diag}\left(1, \tau, \frac{\tau^2}{2!}, \frac{\tau^3}{3!}, \dots, \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\right)$, приводится к виду:

$$f_{k+1} = \Phi_{f,k} f_k, \\ z_{k+1} = H_{f,k} f_k + \varepsilon_{k+1},$$

где матрица Φ_f является верхнетреугольной с целочисленными элементами, а матрица H_f – строка с единичными элементами, например, при $n = 5$:

$$\Phi_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ H_f = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1).$$

2. Для пары (Φ_f, H_f) строится матрица наблюдаемости, очевидно, также с целочисленными элементами, например, при $n = 5$:

$$N_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{pmatrix}.$$

Оценивается сингулярное число обусловленности $\mu(N_f)$ и делается заключение о целесообразности решения обратной задачи (при заданном значении n) уже на этом этапе.

3. Если это необходимо, то далее выполняется ещё одно преобразование переменных, $f_k = D_s s_k$, где $D_s = \text{diag}(\|N_{f,1}\|, \dots, \|N_{f,n}\|)$ при котором $N_f = N_s D_s$.

4. Вычисляется оценка вектора $s_k = D_s D_f x_k$, осуществляется переход к исходным переменным, т.е. $s_k \rightarrow x_k$, делается заключение о качестве решения задачи в существующих условиях конечной точности вычислений и измерений.

4.1. Демонстрационный пример

Измеряемая функция: $x(t) = e^{at}$, $a = -1$, $t \in [0, t_f]$. Измерение: $z(t) = e^{at} + \varepsilon$. Погрешности: ε – погрешность измерения (стационарный белый шум со среднеквадратическим значением σ); $\varepsilon_1 = 2,2 \cdot 10^{-16}$ – относительная погрешность представления чисел в ЭВМ; $\Delta_i = |x_i(t) - x_i(\hat{t})|$, $i = \overline{1, n}$ – погрешность оценки i -й компоненты вектора $x(t)$ в фиксированный момент времени.

Гипотеза – расширение спектра (числа n) вектора $x(t)$ способствует повышению точности оценок его компонент.

Справедливость гипотезы подтверждена рис. 1, выполненным для случая вычислений с так называемой двойной точностью ($\varepsilon_1 = 2,2 \cdot 10^{-16}$) при отсутствии погрешностей измерений ($\varepsilon = 0$); вместе с этим обращает на себя внимание то, что при расширении спектра производных имеет место накопление погрешностей ε_1 , что весьма заметным становится при $n \geq 7$, однако это может проявиться и позже (т.е. когда $n \gg 7$) при уменьшении ε_1 , например при вычислениях с четверной точностью.

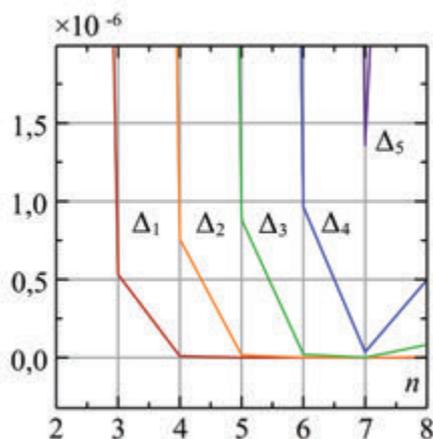


Рис. 1. График модулей погрешностей оценок Δ_i показательной функции и её производных для различных размерностей вектора состояния n при $\hat{t} = 4$

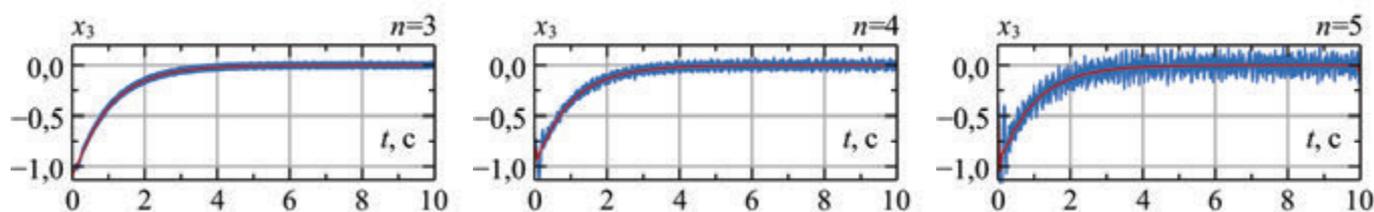


Рис. 2. Графики оценок второй производной x_3 показательной функции (синий) и их осреднённых значений (красный) для различных размерностей вектора состояния n

5. Вычислительный эксперимент

Основная цель вычислительного эксперимента – это оценка эффективности, предлагаемой выше методологии как потенциала возможностей.

Прежде всего необходимо отметить существенную разницу между надводной и подводной гравиметрией. Первая выполняется на или выше так называемой дневной поверхности моря, вторая – под ней. В первом случае навигационная информация доступна как от автономных бортовых, так и внешних самых точных и надёжных источников (например, ГЛОНАСС и GPS). В случае второй, подводной гравиметрии, внешние источники с высокими эксплуатационными характеристиками могут быть или недоступны совсем, или отождествляться с источниками некоторой ограниченной области информационного пространственно-временного континуума. Тогда, полагая, что это область комплементарна аналогичной области изменчивости гравитационного поля, можно обойтись и достаточно оснащённым автономным бортовым информационно-навигационным комплексом.

Из изложенного следует, что понятийный образ планируемого реального эксперимента на больших глубинах может быть воспроизведён и физически реализован на подвижном надводном объекте.

При проведении вычислительного эксперимента исходим из того, что на борту подводного аппарата может быть воспроизведен подвижный координатный триэдр $O\tilde{x}$, в котором доступны измерению величина h – заглубление ПА и вектор v_{12} , по сути – путевой угол (ψ) движения ПА.

При реальной (практической) реконструкции гравитационного поля вполне естественно сравнивать её результаты с предшествующими, а их расхождение квалифицировать как аномалии, казуальность которых как объективна (геофизические процессы), так и субъективна (процессы реконструкции). С исторической точки зрения неизбежно – по мере развития механики Ньютона и утверждения гравиметрии как важнейшей отрасли науки, возникла необходимость

введения эталонных представлений о форме (фигуре) Земли и комплементарному её гравитационному полю.

В настоящее время международным сообществом в качестве эталона формы Земли принят эллипсоид вращения, предложенный в 1743 г. Алексисом Клеро (1713–1765), а в качестве эталона нормального гравитационного поля по его поверхности – поле со значениями, рассчитываемыми по формуле, представленной в 1929 г. Карлосом Сомильяна (1860–1955).

Формула Сомильяна [2, 13]:

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}, k = \frac{b\gamma_p - a\gamma_e}{a\gamma_e}, \quad (11)$$

где γ_e – гравитация на экваторе, γ_p – гравитация на полюсе, a – большая полуось эллипсоида, b – малая полуось эллипсоида, Φ – эллипсоидальная широта.

Наряду с этим и справедливости ради укажем, что первый значительный вклад в создание будущего эталона был сделан А. Клеро в том же 1743 г.

Заметим, что формула Сомильяна не учитывает того обстоятельства, что локализация оценок гравитационного поля реализуется в сложном неоднородном материальном континууме, что требует (и что делается в действительности) учёта соответствующих поправок к эталону Сомильяна [13]. Для понимания этого можно обратиться к простому примеру однородного материального шара, у которого внутреннее и внешнее гравитационные поля различимы, что позволяет избежать ложных представлений о сингулярности поля в его центре. Отметим также, что национальные значения эталона (11) и поправок могут различаться.

Из изложенного выше с очевидностью следует вывод о неизбежности подводной и особенно глубоководной гравиметрии.

Переходя теперь к вычислительному эксперименту, отметим следующее. Для практической гравиметрии наиболее благоприятен тип движения, соответствующий уравнениям (8). Вместе с тем в предвидении необходимости огибания рельефа поверхности, над которой совершается движение, при проведении эксперимента целесообразно обратиться к уравнениям (7).

На рис. 3 представлены фрагменты эксперимента для случая движения объекта по параллели $\tilde{\varphi} = 45^\circ$ со скоростью $\tilde{v}_1 = 1$ м/с, при эволюции высоты Δh с периодом $T = 240$ с и амплитудой 10 м, так что $h = h_0 + \Delta h$, $h_0 = 100$ м и $\Delta h = 10 \sin\left(2\pi \frac{t}{240}\right)$; при этом пространственный период эволюции аномалии δg_3 равен $L = 120$ м, что при $v = 1$ м/с соответствует $T_L = 120$ с, т.е. $\delta g_3 = A \sin\left(2\pi \frac{t}{120}\right)$, где $A = 2,5 \times 10^{-3}$ м/с²; инструментальные погрешности измерений – «белые шумы» с нулевыми средними и СКЗ, равные: $\sigma_f = 10^{-4}$ м/с², $\sigma_v = 10^{-3}$ м/с, $\sigma_h = 10^{-3}$ м.

малии δg_3 равен $L = 120$ м, что при $v = 1$ м/с соответствует $T_L = 120$ с, т.е. $\delta g_3 = A \sin\left(2\pi \frac{t}{120}\right)$, где $A = 2,5 \times 10^{-3}$ м/с²; инструментальные погрешности измерений – «белые шумы» с нулевыми средними и СКЗ, равные: $\sigma_f = 10^{-4}$ м/с², $\sigma_v = 10^{-3}$ м/с, $\sigma_h = 10^{-3}$ м.

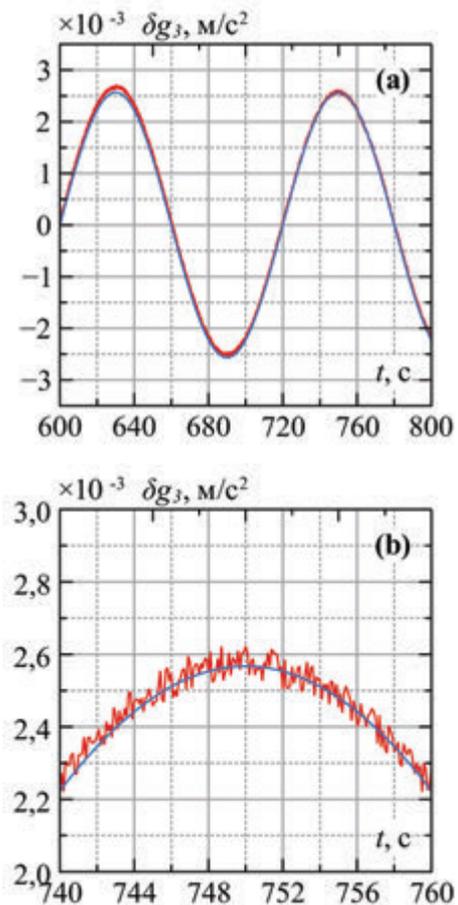


Рис. 3. Фрагменты графиков эволюции аномалии δg_3 : синий – исходное идеальное значение, красный – результат оценивания

Результаты в виде графиков на рис. 3, представленные даже в таком достаточно сыром виде, иллюстрируют вполне положительный эффект, который может быть значительно усилен, если для их коррекции использовать вейвлет-технологии [9, 14, 15, 16].

Заключение

Организация, процесс, а в конечном итоге и качество решения задачи гравиметрии находятся в прямой связи с целью её постановки. Если результат решения имеет многоцелевой характер, что является одним из признаков фундаментальности исследования, то для его успешности необходимы большие и надежные информационные и временные ресурсы.

В случае их достаточности целесообразна организация апостериорного процесса решения задачи. Если же решение задачи гравиметрии имеет прикладной характер, например для навигации, то её решение неизбежно должно выполняться в режиме реального времени на борту подвижного объекта.

В контексте этого заключения и должно рассматриваться содержание настоящей статьи.

Гранты и Программы

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАПУ ДВО РАН (тема № FFW-2026-0009).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Гравиразведка: справочник геофизика / под ред. Е.А. Мудрецов. М.: Недра, 1981. 397 с.
2. Торге В. Гравиметрия / пер. с англ. А.П. Юзеровича. М.: Наука, 1979. 283 с.
3. Пешехонов В. Г., Степанов О.А., Августов Л.И. Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли. Санкт-Петербург: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 390 с.
4. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.
5. Vermeille H. Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates // Journal of Geodesy. 2002. Vol. 76. P. 451–454.
6. Девятисильный А.С., Шурыгин А.В. Интерпретация уравнений движения в теории инерциальной навигации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2025. Т. 26, № 8. С. 438–444.
7. Девятисильный А.С., Дорошко В.М., Числов К.А. Разработка и исследование моделей и технологий гравиметрии на подвижном основании // Информатика и системы управления. 2009. № 2 (20). С. 106–111.
8. Девятисильный А.С., Шурыгин А.В. Математическая модель спутниково-инерциальной подвижной вычислительной гравиметрии // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 1. С. 43–47.
9. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 1982. 320 с.
10. Девятисильный А.С., Шурыгин А.В., Стоценко А.К. Аналитическое конструирование и численное исследование моделей определения движения на данных ГЛОНАСС // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 11. С. 782–787.
11. Lowrie W., Fichtner A. Fundamentals of Geophysics. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. 426 p.
12. Болотин Ю.В., Голован А.А. О методах инерциальной гравиметрии // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2013. № 5. С. 59–67.
13. Медведев П.А., Мазуров Б.Т. Алгоритмы непосредственного вычисления геодезической широты и геодезической высоты по прямоугольным координатам // Вестник СГУГиТ. 2016. № 2 (34). С. 5–13.
14. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Едиториал УРСС, 2018. 320 с.
15. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории / пер. с нем. Т. Кренкеля, Э. Кренкеля. М.: Техносфера, 2004. 280 с.
16. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / пер. с англ. Е.В. Мищенко ; под ред. А.П. Петухова. Изд. 2-е. М.; Ижевск: РХД, 2004. 463 с.

Сведения об авторах

ДЕВЯТИСИЛЬНЫЙ Александр Сергеевич, д. т. н., профессор, г. н. с.

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Адрес: 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, д. 5

Область научных интересов: теория навигации и управление движущимися объектами, математическое моделирование и вычислительные технологии анализа и решения обратных математически некорректно поставленных задач движения

Тел.: +7 (914) 662-36-58. E-mail: devyatis@dvo.ru

ORCID: 0000-0002-3593-5397

КОНОПЛИН Александр Юрьевич, д. т. н., директор

Институт проблем морских технологий им. академика М.Д. Агеева ДВО РАН

Адрес: 690091, Россия, г. Владивосток, ул. Суханова, д. 5а

Область научных интересов: автоматическое управление подводными роботами и манипуляторами, адаптивное управление, информационно-управляющие системы

Тел.: +7 (423) 243-24-16. E-mail: konoplin@marine.febras.ru

ШУРЫГИН Артём Владимирович, м. н. с.

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Адрес: 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, д. 5

Область научных интересов: теория навигации и управление движущимися объектами, математическое моделирование и вычислительные технологии анализа и решения обратных математически некорректно поставленных задач движения

Тел.: +7 (924) 339-18-08. E-mail: ashurygin@dvo.ru

ORCID: 0000-0003-2388-8455



ANALYTICAL DESIGN OF MOBILE COMPUTING GRAVIMETRY MODELS FOR MARINE OBJECTS

A.S. Devyatisilny, A.Yu. Konoplin, A.V. Shurygin

The paper addresses gravimetry on a marine moving object. It is noted that the central problem in solving this task is the issue of numerical differentiation of the measured function, aimed at high-precision estimates of kinematic motion parameters as a reference result. To achieve this, a methodology and computational procedure are proposed that differ significantly from the known ones. A demonstration example provided in the paper confirms the hypothesis regarding the spectrum of derivatives, which is sufficiently evidenced by the corresponding graphic material. Two forms of systems of differential (in terms of kinematic parameters) equations of gravimetry are presented. The defining feature of the covariance of the equations when interpreting motion in geocentric and ellipsoidal coordinate systems is shown. The possibility of a highly efficient solution to the problem of mobile gravimetry is confirmed by the results of a computational experiment.

Keywords: marine moving object, underwater vehicle, computational mobile gravimetry, coordinate system, measured function, numerical differentiation, covariance of equations, computational experiment.

References

- Mudretsova, E. A. (Ed.). (1981). *Gravirazvedka: Spravochnik geofizika* [Gravity Exploration: A Geophysicist's Handbook]. Moscow: Nedra. 397 p.
- Torge, W. (1979). *Gravimetriya* [Gravimetry] (A. P. Yuzerovich, Trans.). Moscow: Nauka. 283 p. (Original work published in German).
- Peshekhonov, V. G., Stepanov, O. A., & Avgustov, L. I. (2017). *Sovremennyye metody i sredstva izmereniya parametrov gravitatsionnogo polya Zemli* [Modern Methods and Means for Measuring the Parameters of the Earth's Gravitational Field]. Saint Petersburg: SSC RF Concern CSRI Elektropribor. 390 p.
- Andreev, V. D. (1967). *Teoriya inertzialnoy navigatsii. Korrektiruemye sistemy* [Theory of Inertial Navigation. Correctable Systems]. Moscow: Nauka. 648 p.
- Vermeille, H. (2002). Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates. *Journal of Geodesy*, 76, 451–454.
- Devyatisilny, A. S., & Shurygin, A. V. (2025). Interpretatsiya uravneniy dvizheniya v teorii inertzialnoy navigatsii [Interpretation of equations of motion in the theory of inertial navigation]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 26(8), 438-444.
- Devyatisilny, A. S., Dorozhko, V. M., & Chislov, K. A. (2009). *Razrabotka i issledovanie modeley i tekhnologiy gravimetrii na podvizhnom osnovanii* [Development and research of models and technologies for gravimetry on a moving base]. *Informatika i Sistemy Upravleniya*, (2), 106-111.
- Devyatisilny, A. S., & Shurygin, A. V. (2021). *Matematicheskaya model sputnikovo-inertzialnoy podvizhnoy vychislitelnoy gravimetrii* [Mathematical model of satellite-inertial mobile computational gravimetry]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 22(1), 43-47.
- Zhuravlev, V. F. (1982). *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki* [Foundations of Theoretical Mechanics]. Moscow: Fizmatlit. 320 p.
- Devyatisilny, A. S., Shurygin, A. V., & Stotsenko, A. K. (2017). *Analiticheskoe konstruirovaniye i chislennoye issledovanie modeley opredeleniya dvizheniya na dannykh GLONASS* [Analytical design and numerical study of motion determination models using GLONASS data]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 18(11), 782-787.
- Lowrie, W., & Fichtner, A. (2020). *Fundamentals of Geophysics* (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. 426 p.
- Bolotin, Yu. V., & Golovan, A. A. (2013). *O metodakh inertzialnoy gravimetrii* [On methods of inertial gravimetry]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika*, (5), 59-67.
- Medvedev, P. A., & Mazurov, B. T. (2016). *Algoritmy neposredstvennogo vychisleniya geodezicheskoy shiroti i geodezicheskoy vysoty po pryamougolnym koordinatam* [Algorithms for direct calculation of geodetic latitude and geodetic height from rectangular coordinates]. *Vestnik SGUGiT*, (2), 5-13.
- Ishlinsky, A. Yu. (2018). *Klassicheskaya mekhanika i sily inertsii* [Classical Mechanics and Inertia Forces]. Moscow: Editorial URSS. 320 p.
- Blatter, C. (2004). *Veyvlet-analiz. Osnovy teorii* [Wavelet Analysis: Fundamentals of Theory] (T. Krenkel & E. Krenkel, Trans.). Moscow: Tekhnosfera. 280 p. (Original work published in German).
- Daubechies, I. (2004). *Desyat lektsiy po veyvletam* [Ten Lectures on Wavelets] (2nd ed., E. V. Mishchenko, Trans.; A. P. Petukhov, Ed.). Moscow; Izhevsk: RCD. 463 p. (Original work published in English)

Information about the authors

DEVYATISILNY Aleksandr Sergeevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher
Institute of Automation and Control Processes FEB RAS
Address: 690041, Russia, Vladivostok, Radio St., 5
Phone : +7 (914) 662-36-58. **E-mail:** devyatis@dvo.ru
ORCID: 0000-0002-3593-5397

KONOPLIN Aleksandr Yuryevich, Doctor of Technical Sciences, Director
M.D. Ageev Institute of Marine Technology Problems Far East
Branch Russian Academy of Sciences
Address: 690091, Russia, Vladivostok, Sukhanova St., 5a
Phone : +7 (423) 243-24-16. **E-mail:** konoplin@marine.febras.ru

SHURYGIN Artyom Vladimirovich, Junior Researcher
Institute of Automation and Control Processes FEB RAS
Address: 690041, Russia, Vladivostok, Radio St., 5
Phone : +7 (924) 339-18-08. **E-mail:** ashurygin@dvo.ru
ORCID: 0000-0003-2388-8455